ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

Section A1 (programme M') 1982

MATHEMATIQUES I (4 h)

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et par $\mathcal{C}_2$ l'espace vectoriel des fonctions deux fois continûment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathfrak{P}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période 1, et $\mathfrak{P}_2$ le sous-espace $\mathcal{C}_2 \cap \mathfrak{P}$.

On considère a, b et c, des éléments fixés de $\mathfrak{P}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a(x) > 0 \quad \text{et} \quad c(x) \leqslant 0 \ , \quad \text{et} \ , \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad c(x) \neq 0$$

Si f appartient à $\mathcal{C}_2$, on note $\tilde{f}$ l'élément de $\mathcal{C}$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \tilde{f}(x) = a(x)\, f''(x) + b(x)\, f'(x) + c(x)\, f(x)$$

On pose :

$$E = \{ f \in \mathcal{C}_2 \ ; \ \tilde{f} = 0 \}$$

On pourra utiliser, sans démonstration, les résultats suivants :

L'application linéaire de $\mathcal{C}_2$ dans $\mathcal{C}$, $f \longrightarrow \tilde{f}$, est surjective, et l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}^2$, $f \longrightarrow (f(0), f'(0))$, est un isomorphisme.

On désigne par L l'application linéaire de $\mathfrak{P}_2$ dans $\mathfrak{P}$ définie par :

$$\forall f \in \mathfrak{P}_2 \qquad L(f) = \tilde{f}$$

Chacune des questions peut être résolue indépendamment des autres à condition d'admettre, en cas de besoin, les résultats figurant dans l'énoncé des questions précédentes.

1° Soit f un élément de $\mathcal{C}_2$ et x_0 appartenant à $\mathbb{R}$.

Montrer que si f admet en x_0 un maximum local positif ou nul, on a :

$$\tilde{f}(x_0) \leqslant 0$$

2° Montrer qu'il existe φ appartenant à $\mathcal{C}_2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \tilde{\varphi}(x) > 0$$

(on pourra chercher φ de la forme $x \longrightarrow e^{rx}$).

3° Soit g un élément de $\mathcal{C}_2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \tilde{g}(x) \geqslant 0$$

Montrer que, pour tout intervalle compact J de $\mathbb{R}$ d'extrémités α et β, on a

$$\forall x \in J \quad g(x) \leqslant \text{Max} \ \{ 0, g(\alpha), g(\beta) \}$$

(on pourra faire intervenir $g + \varepsilon\varphi$, φ étant la fonction introduite dans 2°).

4° Démontrer

$$\forall f \in \mathfrak{P}_2 \qquad [\forall x \in \mathbb{R} \ \ \tilde{f}(x) \geqslant 0] \Rightarrow [\forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x) \leqslant 0]$$

En déduire que l'application L est injective.

5° Démontrer

$$\forall f \in \mathcal{C}_2 \qquad [\tilde{f} \in \mathfrak{P}, \ \ f(0) = f(1), \ \ f'(0) = f'(1)] \Rightarrow [f \in \mathfrak{P}_2]$$

6° Montrer que l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}^2$

$$f \longrightarrow (f(0) - f(1), \ \ f'(0) - f'(1))$$

est un isomorphisme.

7° Montrer que l'application L est surjective.

8° On désigne par V l'application réciproque de L, et on considère $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_2$ comme des espaces normés, la norme sur chacun de ces espaces étant définie par

$$\| f \| = \sup_{x \in \mathbb{R}} | f(x) |$$

a. Montrer que V est une application linéaire continue de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}_2$ (on pourra utiliser 4°).

b. Montrer que, s'il existe un réel strictement positif m tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad c(x) \leqslant -m \ ,$$

on a

$$\forall f \in \mathfrak{P} \qquad \| V(f) \| \leqslant \frac{1}{m} \| f \|$$

FIN

E.N.S.E.T. 1982 1351

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail